Limites ~~aux ... qui~~ des fonctions usuelles.

La semaine prochaine, on verra que beaucoup de fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition D_f.

Ça veut dire que pour tout point x_0 (x_0^+, x_0^-) tel que D_f est un voisinage de x_0, on a $\lim\limits_{x \to x_0^{(\pm)}} f(x) = f(x_0)$.

Cette propriété est vérifiée par les fonctions :

- constantes
- affines
- polynomiales
- rationnelles
- exponentielles
- logarithmes
- puissances
- trigonométriques
- fonctions de trigonométrie hyperbolique.

Limite d'un quotient

<table>
<tr><td rowspan="2">$\lim\limits_{x \to \omega} \frac{f}{g}$</td><td colspan="2"></td><td colspan="5">$\lim f$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$l_1 > 0$</td><td>$l_1 < 0$</td><td>$l_1 = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$\lim g$</td><td colspan="2">$l_2 > 0$</td><td colspan="3" rowspan="2">l_1 / l_2</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$l_2 < 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$l_2 = 0$</td><td colspan="3">indét</td><td colspan="2">indét, $\left\lvert \frac{f}{g} \right\rvert \to +\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$l_2 = 0^+$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="2">indét.</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$l_2 = 0^-$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$+\infty$</td><td>0^+</td><td>0^-</td><td>0</td><td colspan="2" rowspan="2">indét.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$-\infty$</td><td>0^-</td><td>0^+</td><td>0</td></tr>
</table>

Limites des fonctions connues

On a vu les fonctions continues. On a aussi :

- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}^-$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}^+.$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0^+$ si $\alpha < 0$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$ (ch est paire)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$ (sh est impaire)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$ (tanh est impaire)

Ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{\cancel{e^x}(1+e^{-2x})}{\cancel{e^x}(1-e^{-2x})} \to 1.$

$e^x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$ donc on a $\frac{+\infty}{+\infty}$ forme indéterminée.

$1+e^{-2x} \to 1$ $\quad \frac{1}{1} = 1$ (vu).
$1-e^{-2x} \to 1$

Croissances Comparées :

Théorème : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\beta}{\ln(x)^\alpha} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta \ln(x)^\alpha = 0$ $\qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0.$

Limites connues : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

Fonctions Continues

Def : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur x_0 et sur un voisinage de x_0.

On dit que f est <u>continue</u> au point x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Autrement dit : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Analoguement : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur x_0 et sur un voisinage de x_0^+ (resp., x_0^-). On dit que f est continue à droite (resp., à gauche) au point x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp., $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

En formules : à droite : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.q. $x_0 \underset{(<)}{\leq} x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

à gauche : " " $x_0 - \delta < x \underset{(<)}{\leq} x_0 \Rightarrow$ " .

Proposition : Une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 (et sur x_0) est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

(Corollaire direct de la propriété analogue pour les limites)

~~Def. Une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est continue si elle est continue sur tout point $x_0 \in D_f$ t.q. $\exists U \ni x_0$ voisinage, $U \subseteq D_f$~~

Exemples : - Les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :

f :	constantes,	affines,	polynomiales,	rationnelles $\frac{P}{Q}$
D_f :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{Q \neq 0\}$

f -	exponentielle,	logarithme,	puissances
D_f	$\mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$

f - trigonométriques : cos sin tan

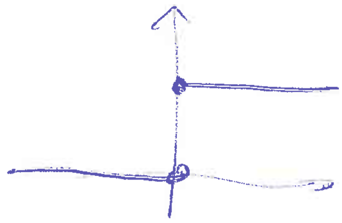
D_f : $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

f - trigonométrique hyperbolique : ch sh th

D_f : $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

- valeur absolue (sur $\mathbb{R}$)

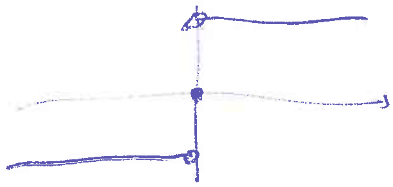
Exemple : - Heaviside : $f(x)=\chi_{[0;\infty[}(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$



est continue sur $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, et pas continue en 0.

en 0, f est continue à droite, mais pas à gauche

- $\text{Signe}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et



pas continue (ni à droite, ni à gauche) en 0.

- $\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ n'est pas continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

- $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\end{cases}$ est continue en x_0 $\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; n'est pas continue en $\forall \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$.

Preuve : - pas continue en $\frac{p}{q}$: $f(\frac{p}{q})=\frac{1}{q}$. Il faut montrer que

$\exists \varepsilon>0$ t.q. $\forall \underset{\frac{1}{n}}{\delta}>0$, $\exists x_n\in\,]\frac{p}{q}-\delta, \frac{p}{q}+\delta[$ t.q. $|f(x_n)-\frac{1}{q}|\geq\varepsilon$.

Il suffit prendre $\varepsilon<\frac{1}{q}$, par exemple $\varepsilon=\frac{1}{2q}$. donc $\forall\delta$, $\exists x_n\in\,]\frac{p}{q}-\delta, \frac{p}{q}+\delta[\,\cap\,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

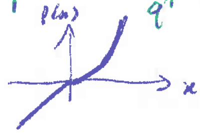
(car $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense en $\mathbb{R}$), et $f(x_n)=0$ donc $|f(x_n)-\frac{1}{q}|=|\frac{1}{q}|>\frac{1}{2q}$.

- Continue en $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Comme $f(x_0)=0$, il faut montrer que :

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.q. $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$.

Mais $|f(x)|\geq\varepsilon \iff x=\frac{p}{q}$, $q\leq\frac{1}{\varepsilon}$. $\Rightarrow$ Donc seulement pour un nombre fini de $\frac{p}{q}$. Il suffit prendre δ assez petit d'une façon que si $\frac{p'}{q'} \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, alors $q' > \frac{1}{\varepsilon}$. ok

Ex: $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ est continue



Déf: ~~On dit que~~ Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, et supposons que D_f soit la réunion d'un certain nombre d'intervalles <u>ouverts</u>.

Alors f est <u>continue</u> si f est continue en tout point $x_0 \in D_f$.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle (pas forcément ouvert) d'extrémités $a < b$. Alors f est <u>continue</u> (sur I) si f est continue sur tout point $x_0 \in]a,b[$, et $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ si $a \in I$, $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ si $b \in I$. (Faire directement pour $[a,b]$, et dire "de façon analogue" pour $[a,b[$, $]a,b]$)

Continuité et suites:

Proposition: Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur x_0 et sur un voisinage de x_0 (resp. x_0^+, x_0^-).

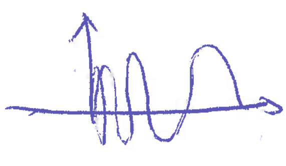
Alors f est continue en x_0 (resp. continue à droite/à gauche en x_0) si pour toute suite $(u_n)_n$ telle que $u_n \to x_0$ (resp. $u_n \to x_0^+, x_0^-$) on a $f(u_n) \to f(x_0)$.

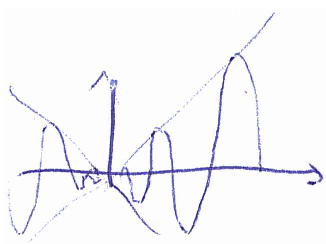
Preuve: Corollaire direct de la propriété analogue pour les limites.

Exemple: $\begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0. (car $\nexists \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$).

Mais ~~$x \sin \frac{1}{x}$~~ $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ est continue en 0.

(car $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.)





Prolongement par continuité.

Soit $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ une fonction (continue) définie sur un voisinage épointé de c.

Si $\exists\, l = \lim\limits_{x \to c} f(x)$, on peut définir une nouvelle fonction

$g : I \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ l & x = c \end{cases}$ $\quad$ $g(x)$ est (par construction) continue en c.

On dit que g est le prolongement par continuité de f à c.

De même façon, si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction (continue) et.

- $\exists\, l = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. (resp., $\exists\, l = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$), alors la fonction

$g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]a, b[\\ l & x = a \end{cases}$

(resp. $g :]a, b] \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]a, b[\\ l & x = b \end{cases}$) est le prolongement

à gauche (resp. à droite) par continuité de f en a (resp. b).

Exemples. - la fonction $x \sin \frac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. (car $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$).

- la fonction $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

- la fonction $\frac{1}{x}$ ne se prolonge pas par continuité en 0 (car $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$)

- la fonction $\frac{1}{x^2}$ ne se prolonge pas par continuité en 0 (car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \notin \mathbb{R}$)

Opérations sur les fonctions continues

~~Définition~~ Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0 (resp. x_0^+, x_0^-), et continue en x_0 (à droite/gauche).

- Restriction : Si $A \subset D_f$ contient un voisinage de x_0 (resp. x_0^+, x_0^-), alors $f|_A : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ est continue (à droite/gauche) en x_0.

Produit par scalaire :
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue en x_0 (resp. ~~x_0^+, x_0^-~~ à droite/gauche)

~~Somme~~ : Soit $g : D_g \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les mêmes propriétés que f.

- Somme : $f+g$ est continue en x_0 (resp. ~~x_0^+, x_0^-~~ à droite/gauche)
- Produit : $f \cdot g$ est continue en x_0 (resp. ~~x_0^+, x_0^-~~ à droite/gauche)
- Rapport ; si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 (resp., à droite/gauche)

~~Soit h~~

- Composition : si $h : D_h \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $f(x_0)$, et continue en $f(x_0)$, alors ~~g~~ $h \circ f$ est continue en x_0.

Théorème des valeurs intermédiaires (Bolzano)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a) < c$, et $f(b) > c$, alors $\exists\, \xi \in]a,b[$ tel que $f(\xi) = c$.

(analogue si $f(a) > c$ et $f(b) < c$ il suffit prendre $-f$ à la place de f)

Preuve : En considérant la fonction $x \mapsto f(x) - c$ au lieu de f, on se ramène au cas où $c = 0$.

Soit $X = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$.

- $X \neq \emptyset$, car $a \in X$ $(f(a) < 0)$.
- X est majoré (par b)

Par la propriété de la borne supérieure, $\exists\, \xi = \sup X$.

Montrons que $f(\xi)=0$.

Par absurde, supposons $f(\xi) = d \neq 0$

Cas : $d>0$ Soit $\varepsilon = \frac{d}{2} > 0$. Par continuité de f, on a $\exists \delta > 0$ tq :

$|x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-d|<\frac{d}{2}$. c'est à dire, $0<\frac{d}{2} < f(x) < \frac{3}{2}d$. $(*)$
$\xi-\delta<x<\xi+\delta$

Mais par la déf. du sup, $\forall \delta>0$ $\exists x > \xi-\delta$ tq $x \in X$ (c'est à dire $f(x)<0$)

en contradiction avec $(*)$.

Cas $d<0$: Soit $\varepsilon = \frac{-d}{2} > 0$. Par continuité de f, on a $\exists \delta>0$ tq

$|x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-d|<-\frac{d}{2}$. $\left(\Leftrightarrow -\frac{3}{2}d < f(x) < -\frac{d}{2}\right)$

Donc $\exists x > \xi$ $(x_0, x+\frac{\delta}{2})$ tel que $f(x) < -\frac{d}{2} < 0$, c'est à dire $x \in X$, en

contradiction avec $\xi = \sup X$. $\square$

Corollaire : 1.) Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continue admet ~~x_0 tq $f(x_0)>0$ et b_0 tq $f(b_0)<0$, alors~~ $a_0<b_0$ tq. $f(a_0)$ et $f(b_0)$ ont signe opposé, alors $\exists x_0$ $(\in]a_0,b_0[)$ tq $f(x_0)=0$. (Bolzano pour $f|_{[a_0,b_0]}$)

2) P polynome de degré impaire n. $P(x) = \underset{\neq 0}{a_n} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$.

alors $\exists x \in \mathbb{R}$, $P(x)=0$.

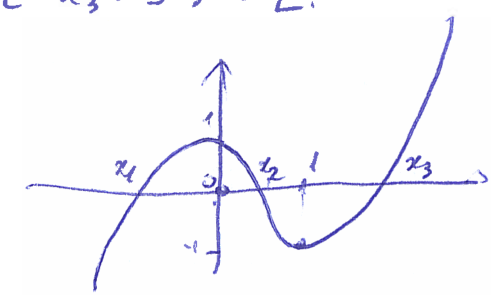
Preuve : Sans perte de généralité, on assume $a_n>0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.

Donc P assume valeurs positives et négatives et elle est continue. On conclut par 1.

Exemple : $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.

$p(0) = 1$, $p(1) = -1$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$.

Par Bolzano : $\exists$ solution $x_1 \in]-\infty;0[$; $x_2 \in]0,1[$ $x_3 \in]1,+\infty[$.



i) Si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, alors f possède au moins un point fixe ($\exists \xi$ tq. $f(\xi) = \xi$).

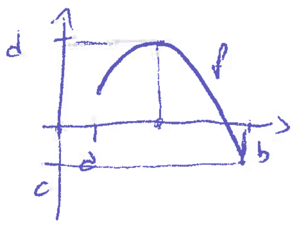
Preuve : il suffit appliquer 1 à $x \mapsto f(x) - x$. (qui est continue)

Existence du maximum/minimum.

Théorème : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $\exists\, c \leq d$ réels tels que $f([a,b]) = [c,d]$.

En particulier, f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$



Remarque. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$ (par Bolzano). L'inclusion est en général stricte.